MATTEO RUGGIERO, e-mail ruggiero@math.univ-paris-diderot.fr C1-1

Page web: http://www.math.jussieu.fr/~ruggiero/

- Cours du 16/09 au 06/12
- Controle continu:
  - Devoir Surveillé 1 : 02/10 (environ) (DS1)
  - Partiel : 19/10 (samedi) (P)
  - Devoir Surveillé 2 : 20/11 (environ) (DS2)
- Semaine de révision : 09-13/12
- Examen à partir du 16/12 (E)
- Rattrapage : ~~Sommer~~ Juin (R)

Note finale du cours:

$$N = \frac{E + CC}{2}, \qquad CC = \frac{2P + DS1 + DS2}{4} + B$$

B = Bonus (≤ 2).

En cas de rattrapage : $N = \max\left\{R, \frac{R + CC}{2}\right\}$.

Livres Conseillés:

- Steward : "Analyse concepts et contextes. Volume 1 : fonctions d'une variable".
- Liret-Martinais : "Algèbre 1re année. Cours et exercices avec solutions"
- " " : "Analyse " " " " " "

- les cours commencent à l'heure
- 20 minutes pour rentrer ~~[illegible]~~ en cas de retard.
- En cas d'absence pour les contrôles continus (DS1, DS2, P),
  - justificatif d'absence
  - 0 sur la note relative (fait moyenne)
- Pas de casques, téléphones, évitez de faire du bruit pour ne pas déranger les autres.
- Questions : - sur ce que je suis en train d'expliquer : vous levez la main et je vous donne la parole.
  - sinon : après le cours ou par e-mail

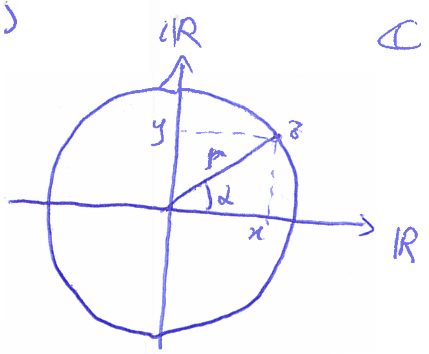
- Dans le cours en amphi :

· Nombres complexes en forme cartésienne : $\mathbb{C} \ni z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

module : $\rho = |z| := \sqrt{x^2 + y^2}$. argument $\alpha = \arg(z)$

Forme trigonométrique : $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

Forme exponentielle : $z = \rho e^{i\alpha}$



Résolution des équations de 1^{er} et 2^e degré.

1^{er} degré : on cherche à trouver les solutions complexes $z \in \mathbb{C}$ de l'équation $(*1)$ $az + b = 0$, avec $a \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{C}$.

Proposition : L'équation $(*1)$ admet une unique solution $z_1 \in \mathbb{C}$, donnée par $z_1 = -\frac{b}{a}$.

Preuve : $az + b = 0 \iff \frac{az}{a} = \frac{-b}{a} \iff z = -\frac{b}{a}$. $\square$

Rmq : On aurait pu aussi procéder comme suit :

soit $z_1 = -\frac{b}{a}$. alors $az_1 + b = a\left(-\frac{b}{a}\right) + b = -b + b = 0$.

Donc z_1 est solution de $(*1)$.

Pour l'unicité : ~~sod~~ notons que $az + b = a(z - z_1)$
$= a\left(z + \frac{b}{a}\right) = a\left(z - \left(-\frac{b}{a}\right)\right)$

Si $z_2 \in \mathbb{C}$ est une solution de $(*1)$. alors. $0 = az_2 + b = a(z_2 - z_1)$

Comme $a \neq 0$, on en déduit $z_1 = z_2$. $\square$.

2e degré : On cherche à trouver les solutions complexes de

$(*2)$ $\quad az^2 + bz + c = 0$. $a \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbb{C}$.

Proposition : ~~L'équation (*2)~~ Les solutions complexes de $(*2)$ sont données par $z = \frac{-b \pm \delta}{2a}$ avec $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta := b^2 - 4ac$

Δ est dit le discriminant de $(*2)$.

Rmq : Parfois en littérature, on peut trouver $\delta = \sqrt{\Delta}$ aussi si $\Delta \notin \mathbb{R}^+$.

Preuve : on procède par la "méthode de complétion du carré".

on veut écrire $az^2 + bz + c$ sous la forme

$$a(z-d)^2 + e \text{ ~~.~~}.$$

$$az^2 + \boxed{bz} + c = az^2 \boxed{-2adz} + ad^2 - e.$$

$\Rightarrow b = -2ad \rightarrow d = -\frac{b}{2a}$

$ad^2 - e = c \rightarrow e = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 - c = \frac{b^2}{4a} - c = \frac{b^2 - 4ac}{4a} = \frac{\Delta}{4a}$

$\to \quad az^2+bz+c=0 \Leftrightarrow a\Big(\underbrace{z-\big(-\tfrac{b}{2a}\big)}_{w}\Big)^2 = \dfrac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow w^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$

$\Leftrightarrow (2aw)^2 = \Delta.$

Si δ est t.q. $\delta^2 = \Delta$, $(2aw)^2 = \delta^2 \Leftrightarrow 2aw = \pm\delta.$

$\to \quad z = w - \dfrac{b}{2a} = \dfrac{\pm\delta - b}{2a}$ □

Rmq: Soit $z_1 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$; $z_2 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$. Alors

$az^2+bz+c = a(z-z_1)(z-z_2) = az^2 - az(z_1+z_2) + az_1z_2.$

En effet: $\boxed{z_1+z_2 =} \dfrac{-b+\cancel{\delta}-b-\cancel{\delta}}{2a} = \boxed{-\dfrac{2b}{\cancel{2}a}}$ $\quad \boxed{z_1z_2 =} \dfrac{(-b+\delta)(-b-\delta)}{4a^2} = \dfrac{b^2-\Delta^2}{4a^2} = \dfrac{\cancel{b^2}-\cancel{b^2}+4ac}{4a^2} = \boxed{\dfrac{c}{a}}$

Rmq: Si $\Delta = 0 \Leftrightarrow \delta = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2.$

Dans ce cas $\quad az^2+bz+c = a(z-z_1)^2.$

On dit que z_1 est une solution de multiplicité 2 de $(*2)$.

Racines carrées.

Soit $w \in \mathbb{C}$. On veut trouver les solutions complexes de $z^2 = w$.

Méthode exponentielle.

Écrivons $z = re^{i\alpha}$, $w = se^{i\beta}$.

$z^2 = w \Leftrightarrow r^2e^{2i\alpha} = se^{i\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = \cancel{\sqrt{s}}\, s \\ 2\alpha = \beta \pmod{2\pi} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{s} \\ \alpha = \begin{cases} \frac{\beta}{2} \\ \frac{\beta}{2}+\pi \end{cases} \pmod{2\pi} \end{cases}$

$\to \quad z_1 = \sqrt{s}\, e^{i\frac{\beta}{2}}, \quad z_2 = \sqrt{s}\, e^{i(\frac{\beta}{2}+\pi)} = \sqrt{s}\, e^{i\frac{\beta}{2}} \underbrace{e^{\pi i}}_{=-1} = -z_1.$

Méthode cartésienne

Écrivons $z = x+iy$ $\quad w = u+iv$.

$z^2 = w \iff (x+iy)^2 = x^2-y^2+2ixy = u+iv \iff \begin{cases} x^2-y^2 = u \\ 2xy = v \end{cases}$

De plus, $|z|^2 = x^2+y^2 = |w| \quad (= \sqrt{u^2+v^2})$.

De $\begin{cases} x^2-y^2 = u \\ x^2+y^2 = |w| \\ 2xy = v \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x^2 = u+|w| \\ 2y^2 = |w|-u \\ 2xy = v \end{cases} \rightsquigarrow \begin{array}{l} x = \pm\sqrt{\dfrac{u+|w|}{2}} \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{|w|-u}{2}} \end{array}$

$\to$ concordance des signes.

Exemples.

1) $z^2+2z+1+i = 0$.

$z = \dfrac{-2\pm\delta}{2} \qquad \delta^2 = \Delta = 4-4(1+i) = -4i$

Effectivement, $z^2+2z+1+i = \underbrace{(z+1)}_{w}{}^2 + i$ (complétion du carré)

Il nous faut donc calculer les solutions $w \in \mathbb{C}$ de $w^2 = -i$

Méthode exponentielle : $w = re^{i\alpha} \qquad -i = 1\cdot e^{-\frac{i\pi}{2}}$

$\rightarrow r^2e^{i2\alpha} = 1\cdot e^{i(-\frac{\pi}{2})} \rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{1} = 1 \\ \alpha = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi} \\ -\frac{\pi}{4}+\pi \pmod{2\pi} \end{cases} \end{cases}$

$2\alpha = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$

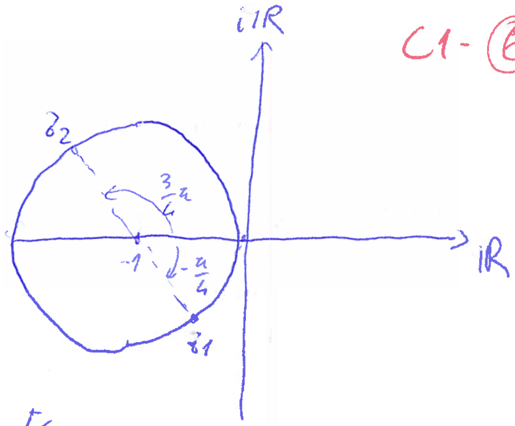
$\rightarrow w_1 = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$w_2 = \cos\left(-\frac{\pi}{4}+\pi\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = -w_1$.

C1-6

$z_1 = w_1 - 1 = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$z_2 = w_2 - 1 = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$



Remarquer que $z^2 + 2z + 1 + i = (z - z_1)(z - z_2)$.

Exercice : calculer w_1, w_2 par la méthode cartésienne.

Exemple 2) Calculer les racines carrées de $1+i =: w$

$z = x + iy = re^{i\alpha}$ t.q. $z^2 = 1+i$

$|w| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. $\arg(w) = -\frac{\pi}{4}$.

Méthode ~~cartésienne exponentielle~~ cartésienne : $(x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy = 1+i$.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = |w| = \sqrt{2} \\ 2xy = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x^2 = 1+\sqrt{2} \\ 2y^2 = \sqrt{2}-1 \\ 2xy = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \\ y = \mp\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \end{cases}$$

signes discordes

Méthode ~~cartésienne~~ exponentielle : $1+i = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

$\rightarrow z_1 = \sqrt[4]{2}\, e^{-i\frac{\pi}{8}}$ $\qquad z_2 = \sqrt[4]{2}\, e^{i(\frac{\pi}{8}+\pi)} = -z_1$.

Comme $z_1 = \sqrt[4]{2}\, e^{-i\frac{\pi}{8}} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$.

on en déduit
$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \cdot \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

Racines n-èmes.

On veut résoudre l'équation $z^n = w$, $w \in \mathbb{C}$ donné.

On utilise la méthode exponentielle (comme on a vu pour $n=2$)

$w = s e^{i\beta}$, $z = r e^{i\alpha}$.

$$z^n = (re^{i\alpha})^n = r^n e^{in\alpha} = s e^{i\beta} = w.$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} r^n = s \\ n\alpha = \beta \pmod{2\pi} \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt[n]{s} \\ \alpha = \frac{\beta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$n\alpha = \beta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple : Racines 3-èmes (troisièmes) de $8i = w$.

$w = 8i = 8 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$. si $z^3 = w$ alors.

$$\rightsquigarrow z = \sqrt[3]{8}\, e^{i\alpha} = 2e^{i\alpha}, \quad \alpha = \frac{\pi}{6} + \frac{2k}{3}\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$k=0 \rightsquigarrow z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$$

$$k=1 \rightarrow z_1 = 2\left(\cos\Big(\underbrace{\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi}_{=\frac{5}{6}\pi}\Big) + i \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$k=2 \rightsquigarrow z_2 = 2\left(\cos\Big(\underbrace{\frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}\pi}_{=\frac{3}{2}\pi}\Big) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = -2i$$

~~Rq~~ : si $k=3 \rightsquigarrow \frac{\pi}{6} + \frac{2\cdot 3}{3}\pi = \frac{\pi}{6} + 2\pi \equiv \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi} \rightsquigarrow z_3 = z_0 \ldots$

Donc il n'y a que 3 solutions distinctes.

Rmq: $z_0 \cdot z_1 \cdot z_2 = 8i$, $z_0 + z_1 + z_2 = 0$. on verra que ce sont des Reels generaux.

Racines n-èmes de l'unité.

Resoudre: $z^n = 1$. $\quad 1 = 1 \cdot e^0$.

On a vu que: $z_k = e^{\frac{2k\pi}{n}i} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \quad k \in \mathbb{Z}$.

sont ~~les~~ les solutions.

si $k_1 - k_2 \in n\mathbb{Z}$ (c'est-à-dire, $\exists h \in \mathbb{Z}$ t.q. $k_1 - k_2 = nh$).

on a $\frac{2k_1\pi}{n} = \frac{2(k_2+nh)\pi}{n} = \frac{2k_2}{n} + 2h\pi \iff z_{k_1} = z_{k_2}$.

Donc il n'y a que n solutions distinctes données par $z_0 \dots z_{n-1}$.

Rmq: si η est une racine de 1, alors η^k est une racine de 1 $\forall k \in \mathbb{Z}$.

$(\eta^k)^n = \eta^{kn} = (\eta^n)^k = 1^k = 1$.

Définition: Une racine n-ème η de 1 est dite <u>primitive</u> si et seulement si $\eta^m \neq 1 \quad \forall\, 0 \leq m < n$.

Exemple: les racines 4-èmes de 1 sont données par $1, i, -1, -i$.

i, ~~est~~ est une ~~sont~~ racines 4-ème primitives, car

$i \neq 1$, $i^2 = -1 \neq 1$, $i^3 = -i \neq 1$. Analoguement pour $-i$.

1 n'est pas primitive, car $1^1 = 1$.

-1 " " " " $(-1)^2 = 1$. En revanche -1 est une racine carrée primitive.

Proposition: Une racine n-ème η de l'unité est primitive si et seulement si toutes les racines n-èmes de l'unité sont données par $\{\eta^k, k \in \mathbb{Z}\}$.
$\quad {}_{\text{où } k\in\{1,\dots,n\}}$

Preuve: ($\Rightarrow$) ~~On procède par contraposition~~

~~On veut~~ Il suffit de montrer que si η est primitive, alors $\eta^k \neq \eta^h$ $\forall\, 1 \leq k < h \leq n$. Si c'est vrai, on a trouvé n solutions distinctes de $z^n = 1$, donc toutes les solutions.

On procède par contraposition (ou l'absurde): supposons que $\exists\, 1 \leq k < h \leq n$ tq. $\eta^k = \eta^h$.

Alors $\eta^{h-k} = 1$, $1 \leq h-k < n \Rightarrow \eta$ n'est pas primitive (absurde).

($\Leftarrow$) Encore par absurde: supposons que $\exists m$, $1 \leq m < n$, tq. $\eta^m = 1$.

alors $\eta^k = \eta^k \cdot \eta^m = \eta^{k+m}$ $\forall k$, et $S = \{\eta^k : k \in \mathbb{Z}\}$ contient au plus $m < n$ éléments distincts. Donc S ne donne pas toutes les racines n-èmes de 1.

$\square$

Exemple: dans l'exemple precedent

$\{1^k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{1\}$. (non primitive)

$\{i^k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{i, -1, -i, 1\}$ (primitive).

$\{(-1)^k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{1, -1\}$. (non primitive)

$\{(-i)^k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{-i, -1, i, 1\}$. (primitive).

Exercice Calculer les racines, primitives et non, 6-èmes de 1.

Rmq: $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ e $e^{-\frac{2\pi i}{n}} = \overline{e^{\frac{2\pi i}{n}}}$ sont toujours racines n-èmes primitives de 1.

Rmq: si z_0 est une racine n-ème de $w \in \mathbb{C}$ (donc $z_0^n = w$).
Alors ~~[illegible]~~ toutes les racines n-èmes de w sont données par

$z_0 \eta$, où η varie parmi les racines n-èmes de 1.

En particulier, si η est une racine n-ème <u>primitive</u>,
alors les solutions de $z^n = w$ sont données par $\{ z_0 \eta^k, 0 \le k < n \}$

Exemple. On calcule les racines 6-èmes de $8i$.

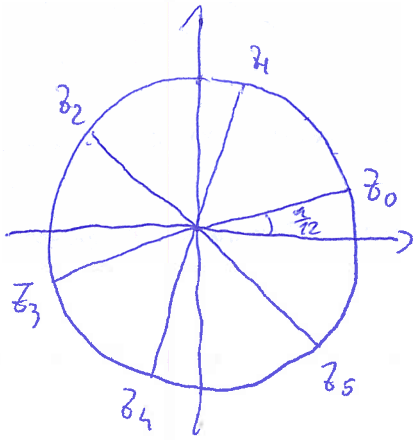
En forme ~~[illegible]~~ exponentielle: $z^6 = 8i$

$$(re^{i\alpha})^6 = 8 \cdot e^{\frac{\pi}{2} i} \rightsquigarrow r = \sqrt[6]{8} = \sqrt{2}$$
$$6\alpha \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

Les racines sont données par:

$$z_0 = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{12} i} \qquad z_1 = \sqrt{2}\, e^{\frac{5}{12}\pi i} \qquad z_2 = \sqrt{2}\, e^{\frac{9}{12}\pi i}, \quad \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$z_3 = \sqrt{2}\, e^{\frac{13\pi}{12} i} = -z_0 \qquad z_4 = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{17}{12}\pi i} = -z_1 \qquad z_5 = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{21}{12}\pi i} = -z_2, \quad \frac{21}{12} = \frac{7}{4}$$



$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{3}{4}\pi\right) + i \sin\left(\tfrac{3}{4}\pi\right)\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= -1 + i$$

$z_5 = 1 - i$

D'autre part $\eta = e^{\frac{\pi}{3} i} = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Il s'en suit que $z_0 = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{12} i} = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{7}{4}\pi i} \cdot e^{\frac{\pi}{3} i} = z_5 \cdot \eta$.

$$\frac{\pi}{12} \equiv \frac{\pi}{12} + 2\pi = \frac{25}{12}\pi = \frac{21}{12}\pi + \frac{4}{12}\pi = \frac{7}{4}\pi + \frac{1}{3}\pi$$

$$\rightsquigarrow z_0 = \cancel{\sqrt{2}}\,(1 - i)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

On en déduit que:

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Re} z_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Im} z_0 = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Propriétés des racines n-èmes.

Théorème : soit $w \in \mathbb{C}$, et $z_1 \dots z_n$ les racines n-èmes de w.
Alors

$$z^n - w = \prod_{k=1}^{n} (z - z_k) \qquad \left(= (z-z_1) \cdot \ldots \cdot (z-z_n) \right).$$

Idée de preuve: si $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ et z_0 est une solution $p(z_0)=0$.
Alors $(z-z_0) \mid p(z)$. On procède alors par ~~réc~~ récursion sur le degré du polynome.

Corollaire : Soit $w \in \mathbb{C}$ et $z_1 \dots z_n$ ses racines n-èmes. On a

$$\prod_{k=1}^{n} z_k = (-1)^{n+1} w, \qquad \sum_{k=1}^{n} z_k = 0.$$

Preuve du corollaire: $z^n - w = \prod_{k=1}^{n} (z-z_k)$.

Le terme de degré 0 est donné par $-w = (-1)^n \prod_{k=1}^{n} z_k \Rightarrow \prod_{k=1}^{n} z_k = (-1)^{n+1} w$.

Le terme de degré $n-1$ est donné par $0 = -\sum_{k=1}^{n} z_k$. $\square$

Preuve directe du corollaire: si $w = s e^{i\beta}$, $z_k = \sqrt[n]{s}\, e^{i\frac{\beta+2k\pi}{n}}$.

$$\Rightarrow \prod_{k=1}^{n} z_k = (\sqrt[n]{s})^n \cdot e^{i\sum_{k=1}^{n}\frac{\beta+2k\pi}{n}} = \underbrace{s \cdot e^{i\beta}}_{w} \cdot e^{i\sum_{k=1}^{n}\frac{2k\pi}{n}} = w \cdot e^{\pi i(n+1)} = w(-1)^{n+1}.$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k\pi}{n} = \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{2\pi}{n} \frac{n(n+1)}{2} = \pi(n+1)$$

Pour la somme. Soit $S := \sum_{k=1}^{n} z_k$, et $\eta \left(= e^{i\frac{2\pi}{n}}\right) (\neq 1)$ une racine primitive de 1. On a $S = \sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n} \eta z_k = \eta S$.

Comme $\eta \neq 1$, $S = 0$

$\square$